Notação utilizada em Séries Temporais

PROF. DR. VASCONCELOS WAKIM

Notação utilizada

- As variáveis maiúsculas X, Y, Z, etc., são variáveis aleatórias (séries específicas de alguma variável);
- Quando as variáveis estão associadas ao tempo, as varáveis estarão associadas com a letra t subscrito = X_t ,Y_t etc.
- As letras gregas são os parâmetros desconhecidos a serem estimados (α, β, Ω, μ, etc.)
- Os parâmetros estimados são denotados por: $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}$, etc.

Notação utilizada

- O operador de Lag é definido como: Y_t, Y_{t-1}, Y_{t+1}
- A diferenciação de uma série a torna estacionária, seja na 1ª ou na 2ª diferença

Operadores

- São instrumentos utilizados para simplificar a notação e facilitar a manipulação de uma ST. Ele pode ser uma letra, um símbolo, etc.
- **Operador de defasagem (L):** gera uma nova série defasada no tempo

$$L^K Y_t = Y_{t-K}$$

- Esta expressão demonstra que Y_t é defasada em K períodos

Operadores

$$Se\ K = 0 \ \rightarrow \ L^0 Y_t = Y_t$$

$$Se\ K = 1 \ \rightarrow \ L^1 Y_t = Y_{t-1}$$

$$Se\ K = 2 \ \rightarrow \ L^2 Y_t = L(LY_t) = LY_{t-1} = LY_{t-2}$$

Propriedades dos operadores de defasagem

- Defasagem de uma constante C é uma constante $\text{LC} = C$
- Operador de defasagem segue a lei distributiva

$$\left(L^i + L^j\right)Y_t = L^iY_t + L^jY_t = Y_{t-i} + Y_{t-j}$$

- O operador de defasagem segue a regra da associação na multiplicação

$$L^iL^jY_t = L^i\left(L^jY_t\right) = L^iY_{t-j} = Y_{t-i-j}$$

Propriedades dos operadores de defasagem

- O operador expoente negativo significa avanço (lead)

$$L^{-K}Y_t = Y_t - (-K) = Y_{t+K}$$

- Para $|\alpha| < 1$, a soma é infinita

$$(1 + \alpha L + \alpha^2 L^2 + \alpha^3 L^3 + \cdots)Y = \frac{1}{1 - \alpha L} Y_t = (1 - \alpha L)^{-1} Y_t$$

- Os operadores são importantes para escrever as equações de forma mais compacta

Propriedades dos operadores de defasagem

- Assumindo uma função do tipo AR(2)

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

- Aplicando os operadores descritos anteriormente temos:

Operador de Diferença (Δ)

- Representa que uma série foi diferenciada por sucessivas vezes

$\Delta^d Y_t$ → foi diferenciada **d** vezes

- $d = 1 \;\rightarrow\; \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
- $d = 2 \;\rightarrow\; \Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1})$ (aplicando propriedades)

$$\Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$
$$(Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$
$$\Delta^2 Y_t = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} + Y_{t-2}$$
$$\Delta^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

Ruído Branco
(White Noise)

PROF. DR. VASCONCELOS WAKIM

Ruído Branco (White noise)

- Uma série Y_t é um ruído branco (estacionário) se:

$$Y_t = \varepsilon_t \text{ e } \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

- Em que Y_t é uma variável aleatória, ε_t independente e identicamente distribuídos (iid) com média zero e variância constante igual a σ_ε^2

- Se ε_t possuir distribuição normal, teremos ruído branco. Observe que: ruído branco é, por definição, uma série com média zero, variância constante, não autocorrelacionada e com mesma distribuição em todo período de tempo . t

Passeio Aleatório (Random Walk)

- Uma série Y_t é um passeio aleatório puro se

$$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{(sem constante)}$$

- Uma série Y_t é um passeio aleatório com constante se

$$Y_t = \alpha + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{(sem constante)}$$

- Assim, se a série é um passeio aleatório puro seu valor em t é igual ao valor em $t-1$ mais uma parcela aleatória retirada de uma distribuição *iid* com média zero e variância constante. Observe que

Passeio Aleatório (Random Walk)

- $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- $Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$
- $\Delta Y_t = \varepsilon_t$

- A primeira diferença de um passeio aleatório é um ruído branco.

Modelos Autorregressivos (AR)

PROF. DR. VASCONCELOS WAKIM

Modelos AR

- Os modelos autorregressivos (AR) são definidos em função de seus valores defasados mais um erro aleatório (que deve ser um ruído branco)
- O número de variáveis defasadas define a ordem do modelo
- AR(1) → $Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$
- AR(2) → $Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$
- AR(3) → $Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \varepsilon_t$
- AR(ρ) → $Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \cdots + \emptyset_\rho Y_{t-\rho} + \varepsilon_t$

Modelos AR

- Aplicando o operador de defasagem no AR(ρ)
- $AR(\rho) \rightarrow Y_t = \emptyset_0 + \emptyset_1 Y_{t-1} + \emptyset_2 Y_{t-2} + \emptyset_3 Y_{t-3} + \cdots + \emptyset_\rho Y_{t-\rho} + \varepsilon_t$
- $Y_t = \emptyset_0 + \boxed{\emptyset_1 L Y_t + \emptyset_2 L^2 Y_t + \emptyset_3 L^3 Y_t + \cdots + \emptyset_\rho L^\rho Y_t} + \varepsilon_t$
- $Y_t - \underbrace{\emptyset_1 L Y_t + \emptyset_2 L^2 Y_t + \emptyset_3 L^3 Y_t + \cdots + \emptyset_\rho L^\rho Y_t}_{\emptyset(L)} = \emptyset_0 + \varepsilon_t$
- $\emptyset(L) Y_t = \emptyset_0 + \varepsilon_t \rightarrow$ forma compacta

Modelos de Média Móvel (MA)

- Y_t é definido como uma média pondera de erro (choques) correntes e passados em relação ao nível da série. O número de termos defasados define a ordem da série:
- MA(1) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1}$
- MA(2) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2}$
- MA(3) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2} - \emptyset_3 \varepsilon_{t-3}$
- Generalizando:
- MA(q) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2} - \emptyset_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \emptyset_q \varepsilon_{t-q}$

Modelos de Média Móvel (MA)

- μ é a média móvel da série
- ε_t choque corrente
- $\varepsilon_{t-i} (i = 1,2,3, \ldots, q)$ são os choques passados

- Aplicando os operadores de defasagem no modelo MA(q)
- MA(q) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2} - \emptyset_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \emptyset_q \varepsilon_{t-q}$

Modelos de Média Móvel (MA)

- MA(q) → $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2} - \emptyset_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \emptyset_q \varepsilon_{t-q}$
- $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \boxed{\emptyset_1 \varepsilon_{t-1} - \emptyset_2 \varepsilon_{t-2} - \emptyset_3 \varepsilon_{t-3} - \cdots - \emptyset_q \varepsilon_{t-q}}$
- $Y_t = \mu + \varepsilon_t \underbrace{\boxed{(1 - \emptyset_1 L \varepsilon_t - \emptyset_2 L^2 \varepsilon_t - \emptyset_3 L^3 \varepsilon_t - \cdots - \emptyset_q L^q \varepsilon_t)}}_{\emptyset(L)}$

Aplicando operador de defasagem neste termo e colocando ε_t em evidência

- Forma compacta: $Y_t = \mu + \emptyset(L)\varepsilon_t$

Nos modelos de média móvel, a ideia é que a série sofre o tempo inteiro choques que levam ao desvio da média.

Modelos Autorregressivos (ARMA)

PROF. DR. VASCONCELOS WAKIM

Modelo ARIMA

- O modelo ARIMA é uma junção dos modelos autorregressivos e de média móvel.

- Antes de adentrar neste modelo vamos abordar o conceito de **Estacionariedade**

Estacionariedade

- A estacionariedade é um pressuposto forte em ST, pois é a partir dela é que se pode fazer inferências estatísticas importantes;

- Por isso, necessitamos que os dados sejam estacionários (ruido branco) para iniciar as análises em séries temporais.

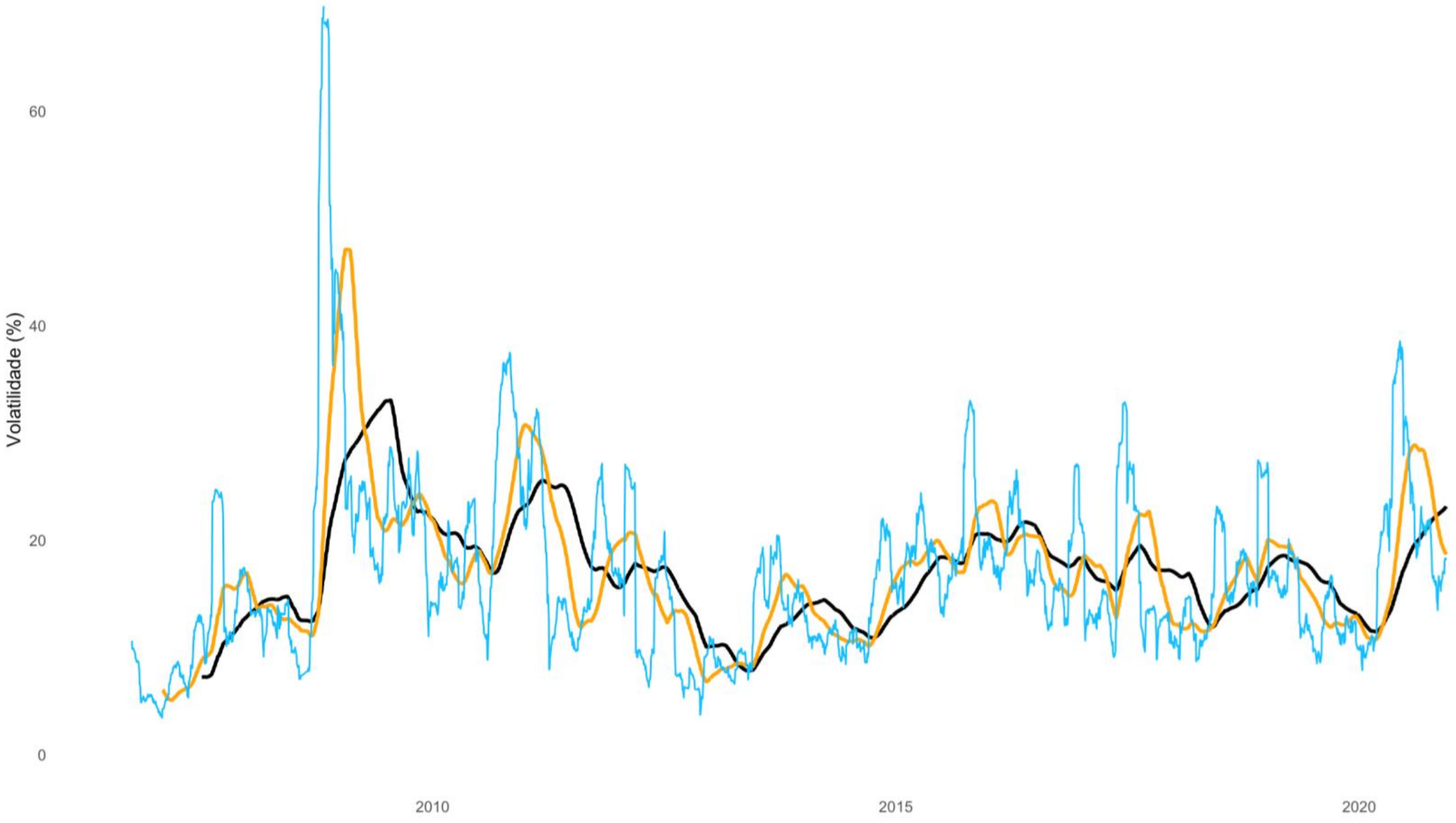
- Assumindo uma variável X indexada no tempo: X_t, temos: $X_t = X_0, X_1, X_2$

Estacionariedade

- X é uma média estacionária se o $E(X)$ em um ponto específico não depender de nenhum outro período da análise, ou seja:
- $E(X) = E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \cdots = E(X) = \mu$

- X é dito que é uma variância estacionária se a variância não está em função do tempo
- $Var(X) = Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = \cdots = Var(X) = \sigma^2$

Estacionariedade



Assumindo que X é uma média estacionária, e que não tem variância estacionária (tem alta e baixa volatilidade)

Estacionariedade

- X terá covariância estacionária se a covariância de X depender apenas de seus valores defasados, e não de outros pontos no tempo.

- $cov(X_t, X_{t+1}) = cov(X_{t-1}, X_t)$
- de forma mais geral para o tamanho do lag K
- $cov(X_t, X_{t+K}) = cov(X_{t+1}, X_{t+K+1}) = cov(X_{t-1}, X_{t+K-1})$

Estacionariedade

- Conceitualmente a estacionariedade são processos cujas características probabilísticas **não mudam ao longo do tempo**

- Assim, a estacionariedade pode ser **FORTE** ou **FRACA**.

Estacionariedade Forte

- Ela pode ser considerada estacionária forte se sua função de densidade de probabilidade conjunta for invariante no tempo.

- $f\,(Y_{t1}, Y_{t2}, Y_{t3}, \dots, Y_{tS})$ for igual a $f\,(Y_{t1+h}, Y_{t2+h}, Y_{t3+h}, \dots, Y_{tS+h})$

- É importante destacar que é muito difícil de verificar que toda distribuição seja invariante no tempo. Desta forma, supõe-se apenas que a **Média, Variância e Covariância,** sejam invariantes.

Estacionariedade Fraca

- Será fraca se a sua média, variância e covariância forem constantes no tempo, ou seja:

- $E(Y_t) = \mu$ (média constante)
- $Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \gamma_0 < \infty$ variância constante e infinita
- $Cov(Y_t, Y_{t-K}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k, k = 1,2,3, \dots, T-1$ (as covariâncias dependem apenas das variâncias defasadas e não do tempo e também são constantes.

Estacionariedade

- Porque o conceito de estacionariedade é importante?

- O teorema de Wold afirma que toda série estacionária pode ser decomposta na soma de um termo determinístico com um componente de média móvel de ordem infinita.